| | |
|---|---|
| **Grundbegriffe** | **beschränkte Menge** |
| **Cauchyfolge** | **Vollständiger Raum, Banachraum** |
| **Kriterium für die Vollständigkeit** | **Präkompakte Menge** |
| **Kompakte Menge** | **Entropiezahl** |
| **Eigenschaften kompakter und präkompakter Mengen** | **Offene Überdeckung** |

Es heißt $M \subseteq X$ genau dann **beschränkt**, wenn $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$. Das ist äquivalent dazu, dass ein $r \geqslant 0$ mit $M \subset B_r(0))$ existiert.

- Vektorraum
- normierter Raum, Norm
- offene und abgeschlossene (Einheits-)Kugel
- offene und abgeschlossene Menge
- Konvergenz

Ein normierter Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in $X$ konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt genau dann **Cauchyfolge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geqslant n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$. Eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge ist selbst konvergent.

Eine Teilmenge $M \subset X$ eines normierten Raumes $X$ heißt genau dann **präkompakt**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $s_1, \dots, s_n$ aus $X$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^n (\{s_i\} + \varepsilon B_x)$ existieren.

Ein normierter Raum ist genau dann vollständig, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset X$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ folgt, dass $\sum_{n=1}^\infty x_n$ in $X$ konvergent ist.

Sei $M \subset X$ beschränkt. Dann heißt die Größe: $\mathcal{E}_n(M) := \inf \left\{ \varepsilon \geqslant 0 \colon \exists s_1, \dots, s_n \in X \colon M \subset \bigcup_{i=1}^n (\{s_i\} + \varepsilon B_x) \right\}$ die $n$-te **Entropiezahl** von $M$.

Die Teilmenge $M$ heißt genau dann **kompakt**, wenn für alle $(x_n) \subset M$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $\lim x_{n_k} \in M$ existiert. Das ist äquivalent dazu, dass jede offene Überdeckung $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von $M$ mit $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ eine endliche offene Teilüberdeckung enthält, d. h. es existieren Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \colon M \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Ein System $\{G_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen aus $X$ heißt genau dann **offene Überdeckung**, wenn $M$ eine Teilmenge der Vereinigung aller $G_i$ ist.

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann gelten: • $M \subseteq X$ präkompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge aus $M$ eine Cauchy-Teilfolge enthält. • $M \subseteq X$ kompakt $\Leftrightarrow$ $M$ präkompakt und vollständig • $M \subseteq X$ präkompakt, dann ist $M$ beschränkt • $M \subseteq X$ kompakt, $M$ beschränkt und abgeschlossen
• überdeckungskompakt und folgenkompakt sind äquivalent

| | |
|---|---|
| **Überdeckungskompakt** | **Linearer Teilraum** |
| **Lineare Hülle** | **Abgeschlossene Hülle** |
| **Separabler Raum** | **Norm auf** $X/_M$ |
| **Quotientenabbildung** | **Lemma von Riesz** |
| **Äquivalente Normierungen** | **Lineare Abbildung, Funktional** |

Sei $X$ ein Vektorraum. Eine beliebige Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann **linearer Teilraum** von $X$, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und für alle $x, y \in M$ gilt: $\alpha x + \beta y \in M$.

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt genau dann **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung von $M$ eine endliche Teilüberdeckung enthält.
Diese Eigenschaft nennt man oft auch **Heine-Borel-Eigenschaft**.

Sei $M$ eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes $X$. Die Menge $A$, definiert als der Durchschnitt aller $N \supseteq M$, wobei $N$ ein abgeschlossener Teilraum von $X$ ist, heißt **abgeschlossene lineare Hülle** von $M$.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq X$. Dann heißt $\bigcap_{N \supseteq M} N$ die **lineare Hülle** von $M$. Bei der Vereinigung ist $N$ ein Teilraum von $X$.

$\|[x]\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$

Ein normierter Raum heißt genau dann **separabel**, wenn eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ mit $\mathrm{cl}(M) = X$ existiert.
Ein normierter Raum $X$ ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ mit $\mathrm{cl}(\mathrm{span}(M)) = X$ gibt.

(a) Sei $X$ ein normierter Raum und $M \subsetneq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in X$ mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und $\|Q_M x_\varepsilon\| = \inf\{\|x_\varepsilon - z\| : z \in M\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

(b) Ist $\dim X < \infty$, dann existiert ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Q_M x\| = 1$.

Sei $X$ ein Vektorraum und $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Die Abbildung $Q_M : X \to X/_M$ definiert durch $Q_M x := [x]$ heißt **Quotientenabbildung**.

(i) Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt **lineare Abbildung** oder **linearer Operator**, wenn $\forall x, y \in X \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt: $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$

(ii) Ist $Y = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, so heißen die linearen Operatoren $T : X \to Y$ **lineare Funktionale**.

(iii) Mit $N(T) := \ker(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ wird der **Nullraum** oder **Kern** und mit $R(T) := \{Tx : x \in X\}$ wird der **Bildraum** von $T$ bezeichnet.

Zwei Normierungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen genau dann **äquivalent** auf $X$, wenn für alle $x \in X$ ein $m$ und $M$ größer als Null existieren für die gilt: $m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$.
Auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent.

| | |
|---|---|
| **Beschränkter Operator** | **Operatorennorm** |
| **Raum der beschränkten linearen Operatoren** | **Produktoperator, Komposition** |
| **Neumannsche Reihe** | **Faktorisierungssatz** |
| **Metrische Surjektion und Injektion** | **Fortsetzung, Einschränkung** |
| **Satz von Hahn-Banach** | **Dualer Operator** |

Sei $T\colon X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator von einem normierten Raum $X$ in einen normierten Raum $Y$. Die Zahl $\|T\|$ definiert durch $\|T\| := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ heißt **Norm** des Operators $T$ oder kurz **Operatorennorm**.

Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ von einem normierten Raum $X$ in einen normierten Raum $Y$ heißt genau dann **beschränkt**, wenn $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < \infty$.

Seien $S\colon X \to Y$ und $T\colon Y \to Z$ lineare Operatoren zwischen den Vektorräumen $X$ und $Y$ bzw. $Y$ und $Z$. Der **Produktoperator** (oder **Komposition**) $TS\colon X \to Z$ ist definiert durch $(TS)x = T(Sx)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "TS"] \arrow[dr, "S"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

Seien $S, T\colon X \to Y$ lineare Operatoren von einem Vektorraum $X$ in einen Vektorraum $Y$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Zahl. Dann sind $S + T, \alpha T\colon X \to Y$ durch $(S + T)x := Sx + Tx$ bzw. $(\alpha T)x := \alpha(Tx)$ für $x \in X$ definiert. Es sind $S + T$ und $\alpha T$ lineare Operatoren. Der Raum $\mathcal{L}_0(X, Y) := \{T\colon X \to Y\colon T \text{ linear}\}$ ist wieder ein Vektorraum.

Seien $X, Y$ normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann lässt sich $T$ wie folgt faktorisieren: $T = J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)}$. Dabei ist $Q_{N(T)}\colon X \to X/_{N(T)}$ die Quotientenabbildung, $J_{R(T)}\colon R(T) \to Y$ die identische Einbettung mit $J_{R(T)}(y) := y$ für $y \in R(T)$ und $T_0\colon X/_{N(T)} \to R(T)$ definiert durch $T_0[x] = Tx$. Für die Normen der Operatoren gilt: $\|J_{R(T)}\| \leqslant 1, \|T_0\| = \|T\|, \|Q_{N(T)}\| \leqslant 1$. Der Operator $T_0$ ist bijektiv von $X/_{N(T)}$ auf $R(T)$, falls $T \neq 0$.

Sei $X$ ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $I - T$ invertierbar und es gilt

$$(I - T)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k \in \mathcal{L}(X)$$

Seien $X, Y$ normierte Räume und $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **Fortsetzung** von $T_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ von $M$ auf $X$, wenn $T_0 = T \cdot J_M$, wobei $J_M(x) := x$ für $x \in M$. Weiter heißt $T_0$ genau dann **Einschränkung** von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von $X$ auf $M$, wenn $T_0 = TJ_M$.

Seien $X, Y$ normierte Räume.

1. Eine Abbildung $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **metrische Surjektion**, wenn $Q(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_Y$.
2. Eine Abbildung $J \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **metrische Injektion**, wenn für alle $x \in X$ gilt, $\|Jx\| = \|x\|$.

Gilt zusätzlich $JX = Y$, so heißt $J$ auch **Isometrie** oder **metrischer Isomorphismus** von $X$ auf $Y$.

Seien $X$ und $Y$ normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Der **duale Operator** $T'\colon X' \to Y'$ von $T$ ist definiert durch:

$$T'a := a \circ T \qquad a \in Y'$$

In der Literatur wird $T'$ auch oft als adjungierter Operator bezeichnet. Der Begriff des dualen Operators ist unerlässlich im Studium von beschränkten linearen Operatoren.

Sei $M \subset X$ ein linearer Teilraum eines normierten Raumes $X$. Dann kann jedes beschränkte lineare Funktional auf $M$ normgleich auf $X$ fortgesetzt werden, d. h. $\forall a \in M' \; \exists b \in X'\colon b|_M = a$ und $\|b\| = \|a\|$.

| | |
|---|---|
| **Bidualer Raum** | **Kanonische Einbettung** |
| **Linearer Homöomorphimus** | **reflexiver Banachraum** |
| **Metrische Fortsetungseigenschaft** | **Bairescher Kategoriensatz** |
| **nirgends dicht, 1./2. Kategorie** | **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit** |
| **Satz von Banach-Steinhaus** | **Offene Abbildung** |

Sei $X$ ein normierter Raum. Die Abbildung $K_X : X \to X''$ definiert durch $(K_X x)a := a(x)$ für $x \in X$ und $a \in X'$ ist eine metrische Injektion, d. h. $K_X \in \mathcal{L}(X, X'')$ und $\|K_X x\| = \|x\|$ für $x \in X$.

Sei $X$ ein normierter Raum. Dann heißt $X'' := (X')'$ **bidualer Raum** von $X$.

Ein Banachraum $X$ heißt **reflexiv**, wenn $K_X$ eine Surjektion ist.

Seien $X$ und $Y$ normierte Räume. Dann heißt ein linearer Operator $T : X \to Y$ **linearer Homöomorphimus**, falls $T$ bijektiv und bistetig ist.

Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, wobei $A_k$ abgeschlossen sind. Dann existiert ein $k_0$ mit $\operatorname{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Ein Banachraum $F$ besitzt die metrische Fortsetzungseigenschaft, wenn für jede metrische Injektion $J : X_0 \to X$ von einem normierten Raum $X_0$ in einen normierten Raum $X$ und jeden Operator $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, F)$ ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, F)$ existiert mit $T_0 = T \circ J$ und $\|T\| = \|T_0\|$.

Sei $X$ ein Banachraum, $Y$ ein normierter Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Menge beschränkter linearer Operatoren, so dass für jedes $x \in X$: $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$ ist. Dann gilt, $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| < \infty$, d. h. $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ist in $\mathcal{L}(X, Y)$ eine beschränkte Menge.

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann gelten:

(i) $M \subseteq X$ **nirgends dicht** $\Leftrightarrow \operatorname{int}(\operatorname{cl}(M)) = \emptyset$.

(ii) Es heißt $M \subseteq X$ von **1. Kategorie** $\Leftrightarrow \exists \{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ von nirgends dichten Mengen: $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

(iii) Es heißt $M \subseteq X$ von **2. Kategorie** genau dann, wenn $M$ nicht von 1. Kategorie ist. ($\forall (M_n) \subset X$: $M = \bigcup M_n \Rightarrow \exists M_{n_0}$: $\operatorname{int}(\operatorname{cl} M_{n_0}) \neq \emptyset$)

Seien $X$ und $Y$ metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **offen**, wenn sie jede offene Menge $O \subset X$ wieder in eine offene Menge $f(O)$ abbildet.

Seien $X, Y$ Banachräume, $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren, so dass für jedes $x \in X$ die Folge $(T_n x)$ konvergiert. Dann ist der Operator $T : X \to Y$ definiert durch $Tx := \lim T_n x$ linear und beschränkt, d. h. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

**Äquivalenz von Stetigkeit und Beschränkheit linearer Operatoren**

**Invertierbarer Operator**

**Satz von der offenen Abbildung**

**Satz vom inversen Operator**

**Finiter Operator**

**Projektion**

Seien $X, Y$ Vektorräume und $T: X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt $T$ **invertierbar**, wenn eine Abbildung $S: Y \to X$ mit $ST = I_X, TS = I_Y$ existiert. Dabei sind $I_X$ und $I_Y$ die identischen Operatoren auf $X$ bzw. $Y$.

Seien $X, Y$ normierte Räume und $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) Es existiert eine Konstante $c \geqslant 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$.

(ii) $T$ ist gleichmäßig stetig.

(iii) $T$ ist in $x = 0$ stetig.

(iv) $\|T\| := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < \infty$

Seien $X$ und $Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sei injektiv und surjektiv. Dann existiert $T^{-1}: Y \to X$ und $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Seien $X$ und $Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist $T$ genau dann surjektiv, wenn $T$ offen ist.

Eine beschränkte lineare Abbildung $P \in \mathcal{L}(X)$ von einem normierten Raum $X$ in sich heißt genau dann **Projektion**, wenn gilt $P^2 = P$.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von einem normierten Raum $X$ in einen normierten Raum $Y$ heißt genau dann **finit** oder **finiter Operator**, wenn $\dim R(T) = \dim T(X) < \infty$. Die Dimension des Bildraumes wird auch als Rang bezeichnet. Wir bezeichnen die Menge aller finiten Operatoren mit $\mathcal{F} := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ finiter Operator}\}$.